پاسخ به تمرین‌ها، پرسش‌ها، و فعالیت‌های فصل ۵

پرسش ۵ـ۱

با داغ کردن قوطی، جنبش مولکول‌های گاز درون آن بسیار زیاد می‌شود و فشار وارد از گاز به دیواره‌های آن افزایش می‌یابد و این می‌تواند موجب ترکیدن قوطی شود. در واقع این مثالی از یک فرایند ترمودینامیکی هم‌حجم است که در یک فرایند هم‌حجم با افزایش دما، فشار افزایش می‌یابد.

تمرین ۵ـ۱

الف) از قانون اول ترمودینامیک (معادلهٔ ۵ـ۱) استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه در فرایند هم‌حجم $W=0$ است، داریم

$$\Delta U = Q + W = Q = nC_V\Delta T$$

بنابراین، تغییر انرژی درونی گاز برابر است با

$$\Delta U = nC_V\,(T_2 - T_1)$$

ب) برای گازهای کامل تک اتمی، گرمای ویژهٔ مولی در حجم ثابت برابر با $\frac{3}{2}R$ است. بنابراین، ΔU را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

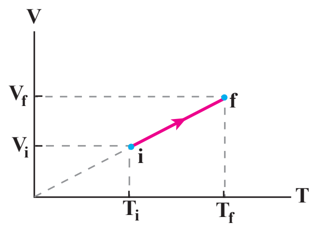
$$\Delta U = n(\frac{3}{2}R)\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

تمرین ۵ـ۲

چون گاز، کامل (آرمانی) است با استفاده از معادلهٔ حالت گاز آرمانی داریم:

$$V = \left(\frac{nR}{P}\right)T$$

چون nR/P ثابت است، رابطهٔ بالا معادلهٔ یک خط راست است که امتداد (برون‌یابی) آن از مبدأ مختصات می‌گذرد. بنابراین نمودار این رابطه به شکل روبرو می‌شود.



تمرین ۵ـ۳

در تراکم هم فشار، در شکل ۵ـ۱۲ کتاب، جابه‌جایی رو به پایین می‌شود، در حالی‌که سوی نیروی وارد از گاز به پیستون تغییر نمی‌کند و بنابراین کار گاز روی پیستون چنین می‌شود:

کار گاز روی پیستون $= Fd\cos 180^\circ = -Fd = -PAd$

اما توجه کنید که این بار Ad برابر $-\Delta V$ است (زیرا حجم کاهش یافته و ΔV منفی می‌شود). پس خواهیم داشت:

کار گاز روی پیستون $= -PAd = -P(-\Delta V) = P\Delta V$

ولی چون کار پیستون روی گاز (کار محیط) منفی این رابطه است، کار پیستون روی گاز $-P\Delta V$ می‌شود که همان رابطهٔ ۵ـ۳ کتاب است.

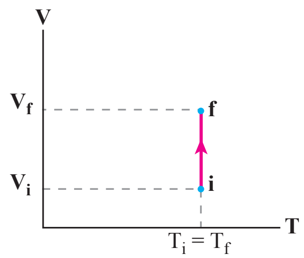
فعالیت ۵ـ۱

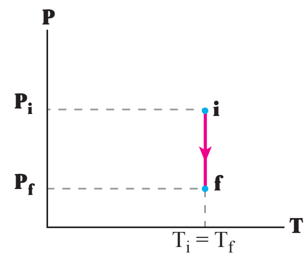
از رابطهٔ (۵ـ۳) می‌دانیم که کار در فرایند هم فشار از رابطهٔ $W= -P\Delta V$ به‌دست می‌آید. از روی شکل داده شده برای

فرایند هم‌فشار در می‌یابیم که حاصلضرب $P\Delta V$ در واقع مساحت زیر نمودار $P\text{-}V$ (مساحت ناحیهٔ هاشور خورده) است. بنابراین می‌توان گفت که در فرایند هم‌فشار، قدرمطلق کار انجام شده (قدرمطلق کار محیط روی دستگاه) برابر با سطح زیر نمودار $P\text{-}V$ است.

تمرین ۵ـ۴

الف) بدیهی است که باید ترتیبی دهیم که حجم گاز داخل استوانهٔ حاوی گازی که در تماس با یک منبع گرما با دمای ثابت است به‌گونه‌ای تدریجی و ایستاوار افزایش یابد. پس کاهش تدریجی ساچمه‌های سربی می‌تواند روشی قابل قبول باشد؛ البته این کار را می‌توان با روش‌های متفاوتی انجام داد. مثلاً می‌توان به‌جای ساچمه‌های سربی از کیسه‌های شنی استفاده کرد که سوراخ کوچکی در آن ایجاد شده، به‌گونه‌ای که شن به آرامی از آن خارج می‌شود. در هر حال، با کاهش وزن روی پیستون و در نتیجه فشار گاز، پیستون به سمت بالا حرکت می‌کند و در نتیجه گاز منبسط می‌شود. نمودارهای $P\text{-}T$ و $V\text{-}T$ این فرایند به‌صورت زیر می‌شود:





در مورد علامت‌های Q و W توجه کنید چون گاز منبسط شده است، پس گاز (دستگاه) روی محیط کار (مثبت) انجام داده و بنابراین $W < 0$ است. چون فرایند هم‌دما است، برای گاز کامل که انرژی درونی آن فقط به دما بستگی دارد $\Delta U = 0$ است و بنابراین از قانون اول ترمودینامیک درمی‌یابیم $Q + W = 0$ و در نتیجه با توجه به اینکه $W<0$ است، Q باید مثبت باشد. این نتیجه را می‌توانیم این‌طور توجیه کنیم که در واقع در هر مرحلهٔ کوچک از فرایند، بر اثر انبساط گاز، دمای گاز اندکی کاهش می‌یابد که این کاهش دما با گرفتن گرما از منبع جبران می‌شود.

فعالیت ۵ـ۲

وقتی سرنگ حاوی هوا را در آب می‌اندازیم و مدتی صبر می‌کنیم، هوای درون سرنگ با آب هم‌دما می‌شود. از این به بعد، هوای درون سرنگ (به عنوان دستگاه) در تماس گرمایی با حجم بزرگ آب (به‌عنوان منبع گرما) است. دستگاه و منبع، دمای مساوی دارند. با فشردن کُند و آرام پیستون، فشار هوای درون سرنگ افزایش و حجم آن کاهش می‌یابد. ولی از آنجا که هوای سرنگ (دستگاه) در تماس گرمایی با آب (منبع گرما) است و فرایند به‌کندی رخ می‌دهد، دمای دستگاه همان دمای منبع باقی می‌ماند، یعنی دما ثابت است و بنابراین یک انبساط هم‌دما داریم (در واقع توجه کنید که در هر مرحلهٔ کوچک این فرایند، دما در ابتدا کمی زیاد می‌شود، ولی این افزایش دما با دادن گرما به آب جبران می‌شود تا اینکه هوا دوباره با آب هم‌دما شود.) هدف از این فعالیت و تمرین ۵ـ۴ آن است که به دانش‌آموزان گوشزد کند در فرایند هم‌دما، گاز با محیط تبادل گرما می‌کند بی‌آنکه دمایش تغییر کند. در واقع اهمیت فرایند هم‌دما در تبدیل کامل کار و گرما به یکدیگر است. وقتی محیط روی دستگاه کار انجام دهد، به همان اندازهٔ کار، دستگاه به محیط گرما می‌دهد.

تمرین ۵ـ۵

با توجه به معادلهٔ حالت گاز کامل داریم

$$PV = nRT \Rightarrow P = \left(\frac{nR}{V}\right) T$$

اگر طبق راهنمایی، خطّی عمودی بر محور حجم رسم کنیم به‌گونه‌ای که هرچهار نمودار را قطع کند از رابطهٔ بالا درمی‌یابیم که برای چهار نقطهٔ تلاقی که در آنها nR/V (ضریب T) برابر است، فشار کمتر مربوط به دمای کمتر است. بنابراین، منحنی T_1 که خط عمود بر محور حجم را در جا (فشار) پایین‌تری قطع کرده است کمترین دما را دارد و منحنی T_4 که خط عمود بر محور را در جا (فشار) بالاتری قطع کرده است، بیشترین دما را دارد و بدین ترتیب $T_4 > T_3 > T_2 > T_1$ است. البته می‌توانستیم مسئله را به ازای یک فشار معین نیز بررسی کنیم. در آن صورت، معادلهٔ حالت گاز کامل را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$V = \left(\frac{nR}{P}\right)T$$

حال اگر خطی به محور فشار رسم کنیم؛ به‌گونه‌ای که هر چهار نمودار را قطع کند، از رابطهٔ بالا درمی‌یابیم در مقایسهٔ این چهار نقطهٔ تقاطع، کمترین حجم مربوط به کمترین دما و بیشترین حجم مربوط به بیشترین دما است. بنابراین داریم:

$$T_4 > T_3 > T_2 > T_1$$

از این تمرین درمی‌یابیم که نمودارهای هم‌دما برای ما حکم یک دماسنج را دارند و با مشاهدهٔ آنها در مقایسه با یکدیگر می‌توان دربارهٔ دما اظهارنظر کرد و با مشاهدهٔ نمودار یک فرایند در زمینهٔ آنها می‌توان دربارهٔ تغییر دمای گاز در مسیر آن فرایند اظهارنظر کرد.

ب) همان‌طور که اشاره کردیم، مقدار کار برابر مساحت زیر نمودار $P-V$ است. چون مساحت زیر منحنی T_1 از همه کمتر و مساحت زیر منحنی T_4 از همه بیشتر است، بنابراین داریم:

$$|W_4| > |W_3| > |W_2| > |W_1|$$

(توجه کنید که هر چهار نمودار، فرایندهای انبساطی را نشان می‌دهند و در آنها W منفی است)

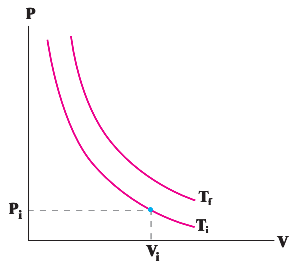
فعالیت ۵ـ۳

وقتی در نوشابه باز می‌شود، گاز محبوس در بالای آن و نیز گاز کربن دی اکسید خارج شده از نوشابه انبساط می‌یابد. این انبساط چنان سریع صورت می‌گیرد که آن را می‌توان تقریباً بی دررو پنداشت. بنابراین انرژی لازم برای انبساط گاز صرفاً توسط انرژی درونی تأمین می‌شود که همان انرژی گرمایی خودِ گاز است. بنابراین، گاز انرژی گرمایی از دست می‌دهد و سردتر می‌شود که این باعث می‌گردد بخار آب موجود در گازِ در حال انبساط به‌صورت قطرات آب درآید. این قطرات موجود در هوا، هالهٔ رقیقی را تشکیل می‌دهند که در اطراف دهانهٔ بطری دیده می‌شود. (توجه کنید اگر دمای مایع در نزدیک نقطهٔ انجماد باشد یخ زدن نوشابه نیز ممکن است رخ دهد. چرا که وقتی درِ بطری باز می‌شود، فشار داخل آن ناگهان تا فشار جو کاهش می‌یابد و این به بالا رفتن نقطهٔ انجماد مایع می‌انجامد. مایع که دمای آن اکنون زیر نقطهٔ انجماد جدید قرار دارد، شروع به یخ زدن می‌کند.)

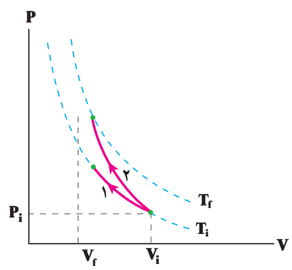
تمرین ۵ـ۶

با توجه به رابطهٔ (۵ـ۵) و با توجه به اینکه در تراکم، کار محیط روی گاز (دستگاه) مثبت است، نتیجه می‌گیریم $\Delta U > 0$ است. چون گاز، کامل (آرمانی) است افزایش انرژی درونی گاز با افزایش دمای آن همراه است؛ یعنی دمای گاز افزایش می‌یابد. این نتیجه از رابطهٔ $\Delta U = nC_V\Delta T$ نیز قابل مشاهده است.

رسم منحنی‌های هم‌دما را در تمرین ۵ـ۵ آموختیم و دریافتیم که دمای بالاتر مربوط به خم (منحنی) بالاتر است؛ مانند شکل زیر (در حل این تمرین از نماد i و f به جای ۱ و ۲ کتاب استفاده کرده‌ایم.)



بدیهی است که در تراکم هم‌دما، دما تغییر نمی‌کند و همواره $T = T_i$ است (مسیر ۱). ولی نشان دادیم که در تراکم هم‌دما، دمای گاز افزایش می‌یابد، پس گاز باید به دمای بالاتری مثل T_f برسد (مسیر ۲)



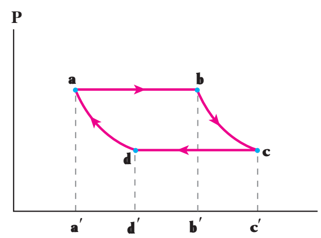
چون سطح زیر نمودار مربوط به تراکم بی‌دررو بیشتر است، $|W|$ برای این فرایند مقدار بیشتری دارد. (البته توجه کنید که در اینجا در هر دو فرایند هم‌دما و بی‌دررو تراکم رخ می‌دهد و بنابراین برای هر دو فرایند $W > 0$ است و می‌توانستیم از قدرمطلق استفاده نکنیم.)

پرسش ۵ـ۲

در اینجا برای هوای داخل سرنگ تراکمی بی‌دررو رخ می‌دهد، چرا که گفتیم هرگاه تغییر حجم گاز چنان به‌سرعت رخ دهد که گاز فرصت تبادل گرما با محیط را پیدا نکند، آن فرایند تراکمی یا انبساطی، بی‌دررو است. در تمرین ۵ـ۶ دیدیم که در یک تراکم بی‌دررو، دمای گاز کامل افزایش می‌یابد. بنابراین، در اینجا دمای هوای داخل سرنگ زیاد می‌شود و با توجه به اینکه نقطهٔ اشتعال کاغذ نیتروسلولز بسیار پایین است، با اندک افزایش دمایی مشتعل می‌شود. البته این آزمایش را می‌توان با انواع دیگری از کاغذ نیز انجام داد ولی لازمهٔ آن دقت فراوان در انجام آزمایش است، در حالی‌که با کاغذ نیتروسلولز، به‌سادگی می‌توان به نتیجه رسید. در این مورد فیلمی در سایت گروه گذاشته‌شده است.

فعالیت ۵ـ۴

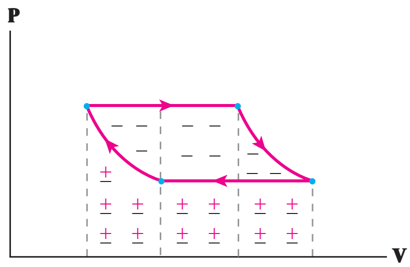
برای آنکه منظور مشخص شود، محل‌های تقاطع خط‌چین‌های عمودی با محور V را به‌ترتیب با a'، b'، c' و d' نمایش می‌دهیم:



بنابراین، قدرمطلق کار انجام شده در فرایند da برابر مساحت محصور در سطح abb′a′، قدرمطلق کار انجام شده در فرایند ab برابر مساحت محصور در سطح abb′a′ و قدرمطلق کار انجام شده در فرایند bc برابر مساحت محصور در سطح bcc′b′ و قدرمطلق کار انجام شده در فرایند cd برابر مساحت محصور در سطح dcc′d′ است. اما علامت‌های کار (محیط روی دستگاه) با توجه به اینکه در فرایندهای da و cd از حجم کاسته شده است، مثبت و در فرایندهای ab و bc که به حجم افزوده شده است، منفی است.

ب) کار انجام شده در چرخه برابر جمع جبری کارهای انجام شده در هر چهار فرایند است. اگر مساحت‌ها و علامت‌های کار را که در قسمت (الف) بررسی کردیم لحاظ کنیم، در می‌یابیم کار محیط در این چرخه برابر با مساحت محصور در داخل چرخه است و بنابراین مقدار کار برابر مساحت داخل چرخه می‌شود.

پ) بنا به توضیح قسمت (ب) کار کلّ انجام شده روی دستگاه در این چرخه، منفی است. به‌عبارت دیگر، شکلی مانند شکل زیر داریم که همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در آن علامت منفی غالب شده است.



فعالیت ۵ـ۵

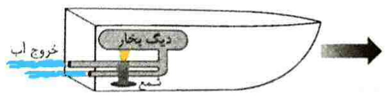
در نیروگاه‌های حرارتی، انرژی گرمایی به توان الکتریکی تبدیل می‌شود. اساس کار کلیهٔ نیروگاه‌های حرارتی گرم کردن آب، تبدیل آن به بخار آب و در پی آن چرخاندن یک توربین بخار است که یک مولّد (ژنراتور) را به‌راه می‌اندازد. بخار پس از عبور از توربین، در یک چگالنده چگالیده شده و به آب تبدیل می‌گردد. سپس این آب به دیگ بخار برگردانده می‌شود و در آنجا به بخار داغ پُرفشار تبدیل گردیده و مجدداً به طرف توربین می‌رود و این چرخه دوباره تکرار می‌گردد که در واقع همان چرخهٔ رانکین ماشین‌های بخار است. منبع انرژی یک نیروگاه که از ساز و کار ماشین بخار استفاده می‌کند می‌تواند متفاوت باشد که البته سوخت‌های فسیلی غالب هستند، گرچه از انرژی هسته‌ای، انرژی زمین‌گرمایی (ژئونرمال)، و انرژی خورشیدی استفاده می‌شود.

فعالیت ۵ـ۶

شاید قایق پوت پوت ساده‌ترین ماشین بخاری باشد که تا به حال دیده‌اید. این ماشین، سیلندر، پیستون، میل‌لنگ، سوپاپ‌های ورود و خروج بخار و ... ندارد ولی در آن چرخه‌ای مشابه چرخهٔ ماشین بخار رخ می‌دهد و این چرخه کار مکانیکی موردنیاز برای به‌حرکت درآوردن قایق در یک استخر یا حوض آب را تأمین می‌کند.

می‌توانید برای ساختن قایق از یک بطری پلاستیکی استفاده کنید. بطری را مطابق شکل طوری از وسط نصف کنید که هر نیمهٔ آن شبیه یک قایق کوچک باشد. یک لولهٔ مسی به قطر تقریباً ۳mm و طول تقریباً ۷۰cm (بسته به بزرگی و کوچکی قایق) تهیه و آن را مطابق شکل خم کنید. (این نوع لوله را می‌توانید از تعمیرگاه‌های یخچال بخرید). برای درست کردن بخش پیچه‌ای شکل در خم این لوله، می‌توانید لوله را دور یک میله بپیچانید. دو سوراخ کوچک در انتهای قایق ایجاد کنید و دو سر لولهٔ مسی را مطابق شکل از این دو سوراخ عبور دهید. دقت کنید سوراخ‌ها خیلی کوچک باشند طوری‌که

وقتی دو سر لولهٔ مسی را از آنها عبور می‌دهید، سوراخ‌ها به‌خوبی مسدود شوند و وقتی قایق روی آب قرار می‌گیرد، آب از کناره‌های این سوراخ‌ها وارد قایق نشود. یک شمع تزئینی که درون استوانهٔ آلومینیومی کوچکی قرار دارد را مطابق شکل، زیر قسمت پیچه مانند لولهٔ مسی قرار دهید، طوری که وقتی شمع روشن شد پیچه را داغ کند. لولهٔ مسی را کاملاً از آب پرکنید. به این منظور می‌توانید یک سر لوله را درون آب قرار دهید و از سر دیگر لوله، هوای درون لوله را بمکید. با مکیدن هوای درون لوله، آب کلّ لوله را پر می‌کند. دو انتهای لوله را با انگشتانتان بگیرید و قایق را طوری در آب قرار دهید که دو انتهای لوله کاملاً دورن آب باشد. اکنون شمع را روشن کنید. مدتی طول می‌کشد تا آب داخلِ بخش پیچه‌ای‌شکل لوله به اندازهٔ کافی داغ و بخار شود. حالا قایق به راه می‌افتد. با نگاه دقیق به حرکت قایق، مشاهدهٔ امواج آب که در محل دو انتهای لولهٔ مسی تشکیل می‌شود، گوش دادن به صدای قایق و ... متوجه می‌شوید که حرکت قایق به‌صورت بُریده بُریده و منقطع انجام می‌شود. در واقع در هر ثانیه، چند ضربه به قایق زده می‌شود و با هر ضربه قایق کمی به جلو می‌جهد. اگر انگشتتان را پشت دو انتهای لوله و درون آب قرار دهید و البته با این کار مزاحم حرکت قایق نشوید، این ضربه‌ها را احساس خواهید کرد.



ولی این قایق چگونه کار می‌کند؟

وقتی آب داخل قسمت پیچه‌ای‌شکل لوله داغ و بخار می‌شود، این بخار پُرفشار، آب درون دو ساق لوله را از دو انتهای لوله، به‌سرعت و با فشار زیاد، به صورت دو جتِ آب به بیرون می‌راند. عکس‌العمل نیرویی که بخار پُرفشار به این دو جت آب وارد می‌کند، باعثِ جهش رو به جلوی قایق می‌شود. وقتی بخار داغ منبسط می‌شود، کمی سرد می‌گردد (انبساط سریع و بی‌دررو)، به‌علاوه اینکه بخار وارد بخش سرد لولهٔ مسی، یعنی دو ساق متصل به پیچه شده است. بخار در این بخشِ سرد، چگالیده و کم فشار می‌گردد. در واقع این بخش از لولهٔ مسی شبیه چگالنده عمل می‌کند. چگالش بخار و کاهش فشار درون لوله سبب می‌شود آب از دو انتهای لوله به درون لوله مکیده شود. دوباره آب حاصل از چگالش بخار، وارد پیچهٔ داغ می‌شود، تبدیل به بخار داغ و پرفشار می‌گردد و همهٔ ماجرا از نو تکرار می‌گردد. هنگام مکش آب از دو انتهای لوله به داخل لوله، نیروی کوچکی در خلاف جهت حرکت قایق به قایق وارد می‌شود ولی این نیرو به مراتب کوچک‌تر از نیروی پیشران قایق است که در مرحلهٔ انبساط بخار درون پیچه و خروج جت‌های آب از دو انتهای لوله به قایق وارد می‌شود، لذا حکت کلی قایق رو به جلو باقی می‌ماند. در واقع مکش آب از دو انتهای لوله به درون آن، به‌صورتِ جتِ آب نیست و به‌آرامی رُخ می‌دهد. در مورد این قایق فیلمی در سایت گروه قرارداده شده است.

پرسش ۵ـ۳

ضریب عملکرد یخچال کارنو با استفاده از رابطهٔ (۵ـ۱۴) به دست می‌آید.

$$K_{\text{کارنو}} = \frac{T_L}{T_H - T_L}$$

بنابراین هرچه دمای دو منبع گرما به یکدیگر نزدیک‌تر باشد (یعنی هرچه $T_H - T_L$ کوچک‌تر باشد) مقدار K بیشتر است. بنابراین نتیجه می‌گیریم کولر گازی در آب و هوای معتدل که اختلاف دمای دو منبع در آن کمتر از اختلاف دمای درون و بیرون خانه در هوای گرم است، بهتر عمل می‌کند.

پرسش‌ها و مسئله‌های پایان فصل ۵

۱ـ از قانون اول ترمودینامیک داریم

$$\Delta U = Q + W$$
$$= -۳۱\,\text{kJ} + ۴۰\,\text{kJ} = ۹\,\text{kJ}$$

۲ـ (الف) همان‌طور که در متن درس اشاره شد اگر پیستون را با گیره‌های ثابت کنیم و دمای گاز را با استفاده از یک منبع گرما به‌تدریج افزایش یا کاهش دهیم، فشار گاز طی یک فرایند هم‌حجم ایستاوار، افزایش یا کاهش می‌یابد.

(ب) این مورد نیز در متن درس توضیح داده شد. در اینجا نیز با افزایش دمای کند و تدریجی توسط منبع گرما، در هر مرحله به علت اختلاف دمای جزئی بین منبع و دستگاه، مقدار کمی گرما به گاز منتقل می‌شود که در نتیجه آن گاز کمی منبسط می‌شود و پیستون را که حالا آزاد است اندکی به طرف بالا جابه‌جا می‌کند. اگر گرما دادن را به همین روش به‌صورت آهسته ادامه دهیم، گاز به‌کندی منبسط می‌شود و پیستون به‌طور ایستاوار به بالا حرکت می‌کند. شتاب حرکت پیستون چنان کم است که می‌توان گفت در طی گرما دادن همواره فشار گاز ثابت می‌ماند. برای کاهش حجم ایستاوار و هم فشار گاز نیز، به روش مشابه، دمای منبع گرما را به‌تدریج و به‌کندی کاهش می‌دهیم.

۳ـ این آزمایش مشابه حالتی است که گاز محبوس در استوانه‌ای با پیستون آزاد در تماس با یک منبع گرما با دمای قابل تنظیم است و دمای منبع به‌آرامی بالا می‌رود.

به علت اختلاف جزئی دمای بین منبع (آب) و هوای درون سرنگ، گرما به کندی به هوای محبوس درون سرنگ منتقل می‌شود و هوا به آرامی [در فشار ثابت] اندکی منبسط می‌گردد و پیستون، سرنگ را اندکی به جلو می‌راند. اگر گرما دادن را به همین روش تدریجی ادامه دهیم، ضمن افزایش دما و حجم هوای درون سرنگ، پیستون به‌آهستگی حرکت می‌کند. همان‌طور که گفتیم این فرایند در فشار ثابت رخ می‌دهد. زیرا وقتی سرنگ به‌طور افقی درون آب قرار گرفته است، اختلاف فشاری بین درون سرنگ و آب بیرون آن وجود ندارد و به محض اینکه یکی از این دو فشار اندکی افزایش یا کاهش یابد، پیستون جابه‌جا می‌گردد تا دوباره فشارها برابر شوند. و چون در اینجا فشار آب تغییر نمی‌کند، فشار درون سرنگ هم تغییر نخواهد کرد و انبساطی هم‌فشار خواهیم داشت.

۴ـ الف) در فرایند هم‌حجم، کار برابر صفر است. برای محاسبهٔ گرمای مبادله شده از رابطهٔ $Q = nC_V\Delta T$ استفاده می‌کنیم و به جای ΔT از قانون گازهای آرمانی (کامل) جای‌گذاری خواهیم کرد. با نمو گرفتن از قانون گازهای کامل داریم

$$\Delta V = nR\Delta T$$

و از آنجا $\Delta T = \dfrac{V\Delta P}{nR}$ می‌شود. با توجه به اینکه برای گاز کامل تک اتمی $C_V = \dfrac{۳}{۲}R$ است، داریم

$$Q = n(\frac{۳}{۲}R)(\frac{V\Delta P}{nR}) = \frac{۳}{۲}V\Delta P$$

که در یکاهای SI چنین به‌دست می‌دهد:

$$Q = \frac{۳}{۲}(۸/۳\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{m^۳})(۳/۰-۱/۵)(۱۰^۵\ \mathrm{N/m^۲}) = ۱/۹\times ۱۰^۳\ \mathrm{J}$$

توجه کنید که در حجم ثابت برای افزایش فشار باید به گاز گرما داد و علامت مثبت Q نیز نشان می‌دهد که این گرمایی است که گاز می‌گیرد تا افزایش فشار دهد.

ب) حال اگر حجم گاز را کم کنیم، برای کار در یکای SI خواهیم داشت

$$W = -P\Delta V = -(۱/۵\times ۱۰^۵\ \mathrm{N/m^۲})(\frac{۸/۳}{۲} - ۸/۳)\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{m^۳}$$
$$= ۶/۲\times ۱۰^۲\ \mathrm{J}$$

توجه کنید که علامت W مثبت شده است و این به معنای آن است که کار روی دستگاه انجام شده است. برای محاسبهٔ گرمای مبادله شده از رابطهٔ $Q = nC_P\Delta T$ استفاده می‌کنیم. در این رابطه به‌جای ΔT دوباره از قانون گازهای کامل قرار می‌دهیم:

$$Q = nC_P\left(\frac{P\Delta V}{nR}\right)$$

با توجه به اینکه C_P برای گازهای کامل تک اتمی برابر $\frac{۵}{۲}R$ است، $Q = \frac{۵}{۲}P\Delta V$ می‌شود و از آنجا در یکاهای SI خواهیم داشت:

$$Q = \frac{۵}{۲}(۱/۵ \times ۱۰^{۵}\ \mathrm{N/m^{۲}})(\frac{۸/۳}{۲} - ۸/۳) \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{m^{۳}}$$
$$= -۱/۶ \times ۱۰^{۳}\ \mathrm{J}$$

توجه کنید علامت Q منفی شده است و این به معنای آن است که گاز به محیط گرما داده است.

۵ـ

$$\text{کار محیط} = -(\text{کار گاز}) = -(\text{مساحت ذوزنقه})$$

$$= -\frac{۱}{۲}\left[(۳/۰۰ + ۲/۰۰)(۱/۰۱ \times ۱۰^{۵}\mathrm{N/m^{۲}})\right](۲/۰۰ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{m^{۳}})$$

$$= -۵۰۵\mathrm{J}$$

و آنگاه با استفاد از قانون اول ترمودینامیک داریم

$$Q = \Delta U - W_{\text{محیط}} = (۹۱۲\mathrm{J} - ۴۵۶\mathrm{J}) + ۵۰۵\mathrm{J}$$
$$= ۹۶۱\mathrm{J}$$

چون Q مثبت شده است این بدین معنی است که گاز گرما گرفته است.

۶ـ الف) نخست قانون اول ترمودینامیک را برای مسیر abc می‌نویسیم:

$$\Delta U_{abc} = Q_{abc} + W_{abc} = ۹۰\ \mathrm{J} + (-۷۰\ \mathrm{J}) = ۲۰\ \mathrm{J}$$

ب) قدرمطلق کار انجام شده برابر با مساحت زیر نمودار فرایند در صفحهٔ $P-V$ است. بنابراین، بدیهی است که مساحت زیر مسیر adc کمتر از مساحت زیر مسیر abc است و در نتیجه مقدار کار در مسیر abc کمتر از مقدار کار در مسیر abc است. از طرفی در هر دو فرایند گاز انبساط یافته است و بنابراین کار محیط منفی و کار دستگاه (گاز) مثبت است. بنابراین کار گاز نیز در مسیر adc کمتر از مسیر abc است. برای مقایسهٔ گرمای داده شده به گاز، باید از قانون اول ترمودینامیک استفاده کنیم: $Q = \Delta U - W$. چون ΔU برای هر دو مسیر یکسان است باید Wها را با هم مقایسه کنیم. چون مقدار کار در مسیر adc کوچک است و از طرفی W کار محیط روی گاز و در هر دو مسیر منفی است پس $W_{adc} > W_{abc}$ است و درنتیجه Q در مسیر adc کوچک‌تر است.

پ) چرخهٔ بسته‌ای را درنظر بگیرید که شامل مسیر abc و مسیر خمیدهٔ بازگشت است. چون

$$\Delta U = \Delta U_{abc} + \Delta U_{ca} = ۰$$

نتیجه می‌گیریم که باید به اندازهٔ $\Delta U_{abc} = ۲۰\ \mathrm{J}$ از گاز انرژی بگیریم. البته چون در این بخش، هنوز چرخه مطرح نشده است می‌توانیم این طور نیز استدلال کنیم:

$$\Delta U_{abc} = U_c - U_a \text{ و } \Delta U_{ca} = U_a - U_c \Rightarrow \Delta U_{ca} = -\Delta U_{abc} = -۲۰\ \mathrm{J}$$

۷ـ آنچه در مورد نظر است نسبت $\Delta U / Q$ است.

$$\Delta U = nC_V\Delta T \text{ و } Q = nC_P\Delta T$$

در نتیجه

$$\frac{\Delta U}{Q} = \frac{C_V}{C_P} = \frac{۵}{۷} \approx ۰/۷$$

۸ـ با استفاده از تعریف کار و رابطهٔ انبساط حجمی داریم:

$$W_{\text{کار مکعب روی هوا}} = -W = P\Delta V$$
$$= P(\beta V.\Delta T)$$
$$= (۱/۰۱ \times ۱۰^{۵}\ \mathrm{N/m^{۲}})[(۳ \times ۲۳ \times ۱۰^{-۶}/^{\circ}\mathrm{C})(۸/۰ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{m^{۳}})(۱۰۰/۰^{\circ}\mathrm{C})]$$
$$= ۵/۸\mathrm{J}$$

از طرفی

$$Q = mC\Delta T = (\rho V)C\Delta T$$
$$= (۲/۷ \times ۱۰^{۳}\ \mathrm{kg/m^{۳}})(۸/۰ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{m^{۳}})(۹۰۰\ \mathrm{J/kg.K})(۱۰۰/۰\mathrm{K}) = ۱/۹۴ \times ۱۰^{۶}\mathrm{J}$$
$$\Rightarrow \Delta U = Q + W = ۱/۹۴ \times ۱۰^{۶}\mathrm{J} - ۵/۶\mathrm{J} = ۱/۹۴ \times ۱۰^{۶}\mathrm{J}$$

توجه کنید که کار انجام شده در برابر Q بسیار ناچیز و اهمیت ندارد که این فرایند در خلأ صورت گیرد ($W = ۰$) یا خیر. تغییر انرژی درونی در دو حالت یکسان است.

۹- الف) قدرمطلق کار برابر با مساحت زیر نمودار فرایند ترمودینامیک‌ها در صفحهٔ P-V است. از روی شکل دیده می‌شود که مساحت زیر نمودار فرایند هم‌فشار از همه بیشتر و مساحت زیر نمودار فرایند بی‌دررو از همه کمتر است. بنابراین مقدار کار انجام شده از کمترین تا بیشترین به ترتیب بی‌دررو، هم‌دما و هم‌فشار است. البته در سوال از کار گاز روی محیط پرسیده شده است که با توجه به انبساطی بدون هر سه فرایند، برای هر فرایند مقداری مثبت است. پس همین مقایسه در مورد خودِ کارها نیز درست است.

ب) از قانون گازهای کامل درمی‌یابیم که در فرایند هم‌فشار با افزایش حجم، دما افزایش می‌یابد. در فرایند هم‌دما نیز بدیهی است که دما ثابت می‌ماند. در فرایند بی‌دررو نیز از قانون اول ترمودینامیک در می‌یابیم که در انبساط، کاهش دما داریم. این موارد همگی در شکل نیز مشخص شده است. بنابراین دمای نهایی در این سه فرایند از کمترین تا بیشترین به ترتیب بی‌دررو، هم‌دما و هم‌فشار می‌شود.

ب) در فرایند بی‌دررو $Q = ۰$ و در فرایندهای هم‌دما و هم‌فشار $Q > ۰$ است. برای مقایسهٔ فرایندهای هم‌دما و هم‌فشار نیز باید به قانون اول ترمودینامیک رجوع کنیم. با توجه به اینکه تغییر انرژی درونی و مقدار کار در فرایند هم‌دما از فرایند هم‌فشار کمتر است و نیز کار در هر دو فرایند منفی است، بنابراین در این مورد نیز ترتیب گرمای داده شده به ترتیب از کمترین تا بیشترین، بی‌دررو، هم‌دما و هم‌فشار می‌شود.

۱۰ـ از درس آموختیم که در چرخه‌های پادساعتگرد در صفحهٔ P-V کار محیط (W) مثبت است. با این حال اینجا می‌خواهیم اثباتی برای این چرخه ارائه دهیم. از قانون اول ترمودینامیک داریم

$$\Delta U = Q + W$$

که در آن W کار محیط است. توجه کنید که در اینجا فرایندی چرخه‌ای داریم و $\Delta U = ۰$ است. در مورد علامت W نیز می‌توانیم این فرایند چرخه‌ای را به سه بخش تقسیم کنیم. بدیهی است که در فرایند هم‌حجم، کار صفر است. اما مساحت زیر فرایند هم‌فشاری که در آن حجم کاهش یافته است، بیشتر از فرایند دیگری است که در آن افزایش حجم داریم. بنابراین کار محیط مثبت و کار دستگاه منفی است. اکنون با توجه به قانون اول ترمودینامیک برای فرایند چرخه‌ای می‌دانیم $Q = -W$ است و بنابراین Q نیز منفی می‌شود.

۱۱ـ الف) در فرایند چرخه‌ای $\Delta U = ۰$ است و در نتیجه از قانون اول ترمودینامیک نتیجه می‌گیریم $Q = -W$ است . با توجه به اینکه چرخه ساعتگرد طی شده است کار محیط منفی است. (توجه کنید که نیازی به حفظ کردن نیست و می‌توانید همواره با مقایسهٔ مساحت زیر منحنی‌ها به منفی یا مثبت بودن کار پی ببرید.) بنابراین Q مثبت می‌شود و دستگاه گرما می‌گیرد.

ب) در قسمت الف دیدیم که Q مثبت است و در نتیجه داریم

$$W = -Q = -۴۰۰\,\mathrm{J}$$

۱۲ـ الف) با استفاده از قانون گازهای کامل داریم

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲}$$

با جای‌گذاری $P_۱= ۱/۰\,\mathrm{atm}$، $P_۲= ۳/۰\,\mathrm{atm}$، $V_۱ = V_۲$ و $T_۱ = ۲۰۰\,\mathrm{K}$ به $T_۲ = ۶۰۰\,\mathrm{K}$ می‌رسیم. که با توجه قواعد محاسبهٔ ارقام معنی‌دار باید به‌صورت $۶/۰ \times ۱۰^۲\mathrm{K}$ بیان شود. اکنون با استفاده از قانون گازهای کامل $T_۳$ و $T_۴$ را نیز به‌دست می‌آوریم

$$T_۳ = T_۲\frac{P_۳V_۳}{P_۲V_۲} = T_۲\frac{V_۳}{V_۲} = (۶۰۰\,\mathrm{K})(\frac{۳۰۰\,\mathrm{L}}{۱۰۰\,\mathrm{L}}) = ۱۸۰۰\,\mathrm{K} = ۱/۸ \times ۱۰^۳\mathrm{K}$$

$$T_۴ = T_۳\frac{P_۴V_۴}{P_۳V_۳} = T_۳\frac{P_۴}{P_۳} = (۱۸۰۰\,\mathrm{K})(\frac{۱/۰\,\mathrm{atm}}{۳/۰\,\mathrm{atm}}) = ۶۰۰\,\mathrm{K} = ۶/۰ \times ۱۰^۲\mathrm{K}$$

ب) مقدار کار انجام شده برابر با مساحت محصور در چرخه است که چنین می‌شود.

$$|W| = [(۳۰۰ - ۱۰۰)(۱۰^{-۳}\mathrm{m}^۳)(۳/۰ - ۱/۰)(۱۰^۵\,\mathrm{N/m}^۲)]$$
$$= ۴/۰ \times ۱۰^۴\mathrm{J}$$

پ) در فرایندهای ۲←۱ و ۳←۲ دمای گاز زیاد شده است و با توجه به رابطه‌های $Q = nC_V\Delta T$ و $Q = nC_P\Delta T$ درمی‌یابیم گاز گرما می‌گیرد.

ت) در فرایندهای ۴←۳ و ۱←۴ دمای گاز کم شده است و با توجه به رابطه‌های $Q = nC_V\Delta T$ و $Q = nC_P\Delta T$ درمی‌یابیم گاز گرما از دست می‌دهد.

توجه: می‌توانیم مقدار این گرماها را نیز محاسبه کنیم. مثلاً برای قسمت پ) انجام می‌دهیم. برای این گرما داریم

$$Q_{in} = Q_H = Q_{۱۲} + Q_{۲۳} = nC_V\Delta T_{۱۲} + nC_P\Delta T_{۲۳}$$

$$= \frac{۵}{۲}nR\Delta T_{۱۲} + \frac{۷}{۲}\,nR\Delta T_{۲۳}$$

برای محاسبهٔ nR از قانون گازهای کامل استفاده می‌کنیم

$$nR = \frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{(۱/۰\,\mathrm{atm})(۱۰۰\,\mathrm{L})}{۲۰۰\,\mathrm{K}} = ۰/۵۰\,\mathrm{L.atm/K}$$

در نتیجه داریم

$$Q_{in} =[\frac{۵}{۲}(۶۰۰\,\mathrm{K} - ۲۰۰\,\mathrm{K}) + \frac{۷}{۲}(۱۸۰۰\,\mathrm{K} - ۶۰۰\,\mathrm{K})(۰/۵۰\,\frac{\mathrm{L.atm}}{\mathrm{K}}) = ۲/۶ \times ۱۰^۳\mathrm{atm.L}$$
$$= (۲/۶ \times ۱۰^۳\mathrm{atm.L})(۱/۰۱ \times ۱۰^۵\mathrm{N/m}^۲)(۱۰^{-۳}\mathrm{m}^۳)= ۲/۶ \times ۱۰^۵\mathrm{J}$$

۱۳ـ چون فرایندی چرخه‌ای داریم $\Delta U = ۰$ است. بنابراین $Q = -W$ می‌شود که در آن W کار محیط است. از طرفی می‌دانیم مقدار کار انجام شده در چرخه برابر مساحت محصور در چرخه است و در چرخه‌های ساعتگرد کار انجام شده بر روی دستگاه منفی است. بنابراین

$$W = -S_{ABC} = -\frac{۱}{۲}[(۳۰/۰ - ۱۰/۰) \times ۱۰^{۵} N/m^{۲}][(۴/۰ - ۱/۰) \times ۱۰^{-۳} m^{۳}]$$
$$= -۳/۰ \times ۱۰^{۳} J$$

و از آنجا $Q = ۳/۰ \times ۱۰^{۳} J$ می‌شود.

۱۴ـ الف)

$$T_C = T_A = \frac{P_A V_A}{nR}$$
$$= \frac{(۲/۴ \times ۱/۰۱ \times ۱۰^{۵} N/m^{۲})(۲/۲ \times ۱۰^{-۳} m^{۳})}{(۰/۳۲ mol)(۸/۳۱۴ J/mol.K)}$$
$$= ۲۰۰/۴ K \approx ۲/۰ \times ۱۰^{۲} K$$

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{P_A (۲V_A)}{nR} = \frac{۲P_A V_A}{nR}$$
$$= ۲T_A = ۴۰۰/۹K \approx ۴/۰ \times ۱۰^{۲} K$$

(ب) فرایند $A \rightarrow B$ را با شاخص پایین ۱ و فرایند $B \rightarrow C$ را با شاخص پایین ۲ و فرایند $C \rightarrow A$ را با شاخص پایین ۳ نشان می‌دهیم.

$$\Delta U_۱ = Q_۱ + W_۱$$

$$Q_۱ = nC_P \Delta T = \frac{۵}{۲} nR\Delta T$$

$$= \frac{۵}{۲}(۰/۳۲ mol)(۸/۳۱۴ J/mol.K)(۲۰۱ K)$$
$$= ۱۳۳۷ J \approx ۱/۳ kJ$$

$$W_۱ = -P_A \Delta V = -P_A(V_B - V_A) = (-۲/۴ \times ۱/۰۱ \times ۱۰^{۵} Pa)(۲/۲ \times ۱۰^{-۳} m^{۳})$$
$$= -۵۳۳/۳ J \approx -۰/۵۳ kJ$$
$$\Rightarrow \Delta U_۱ = Q + W_۱ = ۱/۳ kJ - ۰/۵۳ kJ = ۰/۷۷ kJ \approx ۰/۸ kJ$$

(که البته این نتیجه را می‌توانیم از رابطهٔ $\Delta U = nC_V \Delta T$ نیز به‌دست آوریم.)

$$\Delta U_۲ = Q_۲ + W_۲ \qquad W_۲ = ۰$$

$$Q_۲ = nC_V \Delta T = \frac{۳}{۲} nR\Delta T$$

$$= \frac{۳}{۲}[(۰/۳۲ mol)(۸/۳۱۴ J/mol.K)](-۲۰۰/۵ K)$$
$$= -۸۰۰/۱ J \approx -۰/۸۰ kJ$$
$$\Rightarrow \Delta U_۲ = ۰ + (-۸۰۲ J) \approx -۰/۸۰ kJ$$

(توجه کنید که $\Delta U_۲$ را می‌توانستیم به‌طور مستقیم، با توجه به اینکه در چرخه انرژی درونی کل برابر صفر است و فرایند $C \rightarrow A$ فرایندی هم‌دما است ($\Delta U_۳ = ۰$) برابر قرینهٔ $\Delta U_۱$ بگیریم.) توجه کنید تفاوت $\Delta U_۱$ و $\Delta U_۲$ به‌دست آمده، درنظر گرفتن محاسبات با ارقام معنی‌دار رخ داده است.

۱۵ـ الف) مقدار کار انجام شده روی دستگاه برابر با مساحت محصور در چرخه است و چون چرخه به‌صورت ساعتگرد پیموده شده است، علامت آن منفی است.

$$W = -S_{abcd} = -[(۲/۰ \times ۱۰^۵ - ۱/۰ \times ۱۰^۵)\mathrm{N/m^۲} \times (۰/۰۴ - ۰/۰۲)\mathrm{m^۳}]$$
$$= -۲/۰ \times ۱۰^۳\mathrm{J} = -۲/۰\,\mathrm{kJ}$$

کار انجام شده توسط ماشین قرینهٔ این مقدار و برابر $|W| = ۲/۰\,\mathrm{kJ}$ می‌شود.

ب) فرایند abc از دو فرایند ab (هم‌حجم) و bc (هم‌فشار) تشکیل شده است. بنابراین

$$Q_{abc} = Q_{ab} + Q_{bc} = nC_V\Delta T_{ab} + nC_P\Delta T_{bc}$$
$$= n(\frac{۳}{۲}R)(\frac{V\Delta P}{nR})_{ab} + n(\frac{۵}{۲}R)(\frac{P\Delta V}{nR})_{bc}$$
$$= \frac{۳}{۲}(V\Delta P)_{ab} + \frac{۵}{۲}(P\Delta V)_{bc}$$
$$= \frac{۳}{۲}(۰/۰۲۰\,\mathrm{m^۳})(۱/۰ \times ۱۰^۵\mathrm{N/m^۲}) + \frac{۵}{۲}(۲/۰ \times ۱۰^۵\mathrm{N/m^۲})(۰/۰۲\mathrm{m^۳})$$
$$= ۱/۳ \times ۱۰^۴\mathrm{J} = ۱۳\mathrm{kJ}$$

پ) فرایند cda از دو فرایند cd (هم‌حجم) و da (هم‌فشار) تشکیل شده است. بنابراین

$$Q_{cda} = Q_{cd} + Q_{da} = nC_V\Delta T_{cd} + nC_P\Delta T_{da}$$
$$= n(\frac{۳}{۲}R)(\frac{V\Delta P}{nR})_{cd} + n(\frac{۵}{۲}R)(\frac{P\Delta V}{nR})_{da}$$
$$= \frac{۳}{۲}(V\Delta P)_{cd} + \frac{۵}{۲}(P\Delta V)_{da}$$
$$= \frac{۳}{۲}(۰/۰۴\mathrm{m^۳})(-۱/۰ \times ۱۰^۵\mathrm{N/m^۲}) + \frac{۵}{۲}(۱/۰ \times ۱۰^۵\mathrm{N/m^۲})(-۰/۰۲\mathrm{m^۳})$$
$$= -۱۱۰۰۰\mathrm{J} = -۱/۱ \times ۱۰^۴\mathrm{J} = -۱۱\mathrm{kJ}$$

ت) تغییر انرژی درونی در فرایند abc برابر است با

$$\Delta U_{abc} = Q_{abc} + W_{abc}$$

Q_{abc} را در قسمت (ب) به‌دست آوردیم. کافی است W_{abc} را محاسبه کنیم.

$$W_{abc} = -P\Delta V = -(۲/۰ \times ۱۰^۵\mathrm{N/m^۲})(۰/۰۲\mathrm{m^۳})$$
$$= -۴/۰ \times ۱۰^۳\mathrm{J} = -۴/۰\,\mathrm{kJ}$$

بنابراین داریم

$$\Delta U_{abc} = ۱/۳ \times ۱۰^۴\mathrm{J} - ۴/۰ \times ۱۰^۳\mathrm{J}$$
$$= ۹ \times ۱۰^۳\mathrm{J} = ۹\mathrm{kJ}$$

۱۶ـ الف) بازده ماشین گرمایی آرمانی برابر است با

$$\frac{|W|}{Q_H} = \eta = ۱ - \frac{|Q_L|}{Q_H} = ۱ - \frac{۶۰/۰}{۱۰۰/۰} = ۰/۴۰۰ = \%۴۰/۰$$

ب)

$$P = \frac{|W|}{t} = \frac{۱}{t}(\eta Q_H)$$

$$= \frac{Q_H}{t}\eta = (۰/۴۰۰)(\frac{۱۰۰/۰\ \mathrm{J}}{۰/۵۰۰\ \mathrm{s}}) = ۸۰/۰\ \mathrm{W}$$

۱۷ـ الف) با استفاده از رابطهٔ بازده برای ماشین دمای گرمایی داریم

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}$$

و از آنجا

$$Q_H = \frac{|W|}{\eta} = \frac{۸/۲\times ۱۰^۳\mathrm{J}}{۰/۲۵} = ۳/۲۸ \times ۱۰^۴\mathrm{J}$$

حال استفاده از قانون اول ترمودینامیک $|Q_L|$ را برای ماشین گرمایی آرمانی به‌دست می‌آوریم.

$$|Q_L| = Q_H - |W| = ۳/۲۸ \times ۱۰^۴\mathrm{J} - ۸/۲ \times ۱۰^۳\mathrm{J}$$
$$= ۲/۴۶ \times ۱۰^۳\mathrm{J} \approx ۲/۵ \times ۱۰^۴\mathrm{J}$$

ب) اکنون Q_H چنین می‌شود

$$Q_H = \frac{|W|}{\eta} = \frac{۸/۲\times ۱۰^۳\mathrm{J}}{۰/۳۰} = ۲/۷۳\times ۱۰^۴\mathrm{J}$$

و از آنجا

$$|Q_L| = Q_H - |W|$$
$$= ۲/۷ \times ۱۰^۴\mathrm{J} - ۸/۲ \times ۱۰^۳\mathrm{J} = ۱/۹۱ \times ۱۰^۳\mathrm{J} \approx ۱/۹ \times ۱۰^۴\mathrm{J}$$

۲۱ـ این مسئله راه حلی کلی دارد که در ادامه به آن خواهیم پرداخت. ولی چون در اینجا مثالی عددی خواسته است. مثلاً فرض کنید دماهای منبع‌های بالا و پایین به ترتیب ۳۰۰K و ۲۰۰K باشد و بنابراین بازدهٔ ماشین کارنور چنین می‌شود.

$$\eta = ۱ - \frac{T_L}{T_H} = ۱ - \frac{۲۰۰\mathrm{K}}{۳۰۰\mathrm{K}} = ۰/۳۳۳$$

حال فرض کنید دمای منبع دما بالا را ۵۰K افزایش دهیم

$$\eta = ۱ - \frac{۲۰۰\mathrm{K}}{۳۵۰\mathrm{K}} = ۰/۴۲۸$$

و اگر دمای منبع دما پایین را ۵۰K کاهش دهیم

$$\eta = ۱ - \frac{۱۵۰\mathrm{K}}{۳۰۰\mathrm{K}} = ۰/۵۰۰$$

پس کاهش دمای منبع دما پایین مؤثرتر است.

اثبات کلی: اگر دمای منبع سرد را به اندازهٔ ΔT بکاهیم، $\eta_۱ = ۱ - \frac{T_L - \Delta T}{T_H}$ و اگر دمای منبع گرم را به اندازهٔ ΔT بیافزاییم $\eta_۲ = ۱ - \frac{T_L}{T_H - \Delta T}$ می‌شود. برای آنکه $\eta_۱$ و $\eta_۲$ را مقایسه کنیم، دو روش داریم، یکی این است که جمله‌های دوم را مقایسه کنیم. جملهٔ دوم هر کدام که بزرگ‌تر بود، بازدهٔ آن کمتر است. فرض کنید $\eta_۲ > \eta_۱$ باشد:

$$\frac{T_L-\Delta T}{T_H} > \frac{T_L}{T_H-\Delta T}$$

چون T_H و $T_H+\Delta T$ مقادیر مثبتی هستند می‌توانیم طرفین را در مقدار مثبت $T_H(T_H+\Delta T)$ ضرب کنیم. آنگاه پس از محاسبهٔ ساده‌ای خواهیم داشت

$$T_L > T_H+\Delta T$$

که غیرممکن است. پس حتماً جملهٔ دوم η_1 کوچک‌تر از جملهٔ دوم η_2 است و بنابراین $\eta_1 > \eta_2$. یعنی برای افزایش بازده ماشین کارنو، کاهش دمای منبع دما ـ پایین از افزایش دمای منبع دما ـ بالا مؤثرتر است. **روش دیگر** آن بود که مخرج مشترک بگیریم و کلّ جمله‌ها را با هم مقایسه کنیم:

$$\eta_1 = 1-\frac{T_L-\Delta T}{T_H} = \frac{T_L-T_H+\Delta T}{T_H}$$

و افزایش دمای منبع دما ـ بالا به رابطهٔ زیر:

$$\eta_2 = 1-\frac{T_L}{T_H-\Delta T} = \frac{T_H-T_L+\Delta T}{T_H+\Delta T}$$

اگر توجه کنید، صورت‌های این دو کسر است، ولی مخرج η_2 بزرگ‌تر از η_1 و بنابراین $\eta_2 > \eta_1$

۲۲ـ الف) چون ماشین‌ها یک چرخه را طی می‌کنند، قانون اول ترمودینامیک برای ماشین‌های آرمانی به‌صورت $Q+W=0$ درمی‌آید که در آن $Q=Q_L+Q_H$ است. برای ماشین A داریم:

$$Q_L+Q_H = -1750\,\mathrm{J}+2000\,\mathrm{J} = 250\,\mathrm{J}$$

بنابراین این ماشین قانون اول را نقض می‌کند.

برای ماشین B داریم:

$$Q_L+Q_H = -200\,\mathrm{J}+500\,\mathrm{J} = 300\,\mathrm{J}$$

بنابراین ماشین B هم قانون اول را نقض می‌کند.

برای ماشین C داریم

$$Q = -200\,\mathrm{J}+600\,\mathrm{J} = 400\,\mathrm{J}$$

پس ماشین C قانون اول را نقض نمی‌کند.

برای ماشین D داریم:

$$Q = -90\,\mathrm{J}+100\,\mathrm{J} = 10\,\mathrm{J}$$

بنابراین این ماشین نیز قانون اول را نقض نمی‌کند.

ب) بدیهی است ماشین‌هایی که قانون اول ترمودینامیک را نقض می‌کنند قابل ساختن نیستند و بنابراین آنها را کنار می‌گذاریم. پس می‌ماند ماشین‌های C و D. برای آنکه ماشینی قابل ساخت باشد، بازدل ماشین نباید از بازدهٔ بیشینه (بازدهٔ ماشین کارنو) بیشتر باشد. بازده ماشین کارنو از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\eta_{\text{کارنو}} = 1-\frac{T_L}{T_H} = 1-\frac{300\,\mathrm{K}}{400\,\mathrm{K}} = 0/25$$

بنابراین بازدهٔ ماشین کارنویی که بین این دو دما عمل می‌کند ۲۵٪ است. حال ببینیم بازدهٔ ماشین‌های C و D چقدر

است؟

$$\eta_C = ۱ - \frac{|Q_L|}{Q_H} = ۱ - \frac{۲۰۰\mathrm{K}}{۶۰۰\mathrm{K}} = ۰/۶۶$$

پس بازدهٔ این ماشین بیشتر از ماشین کارنو است و آن نیز قابل ساختن نیست. تنها می‌ماند ماشین D. برای این ماشین داریم:

$$\eta_D = ۱ - \frac{|Q_L|}{Q_H} = ۱ - \frac{۹۰\mathrm{J}}{۱۰۰\mathrm{J}} = ۰/۱۰$$

یعنی بازدهٔ این ماشین ۱۰٪ و کمتر از بازدهٔ ماشین کارنو است و بنابراین تنها این ماشین قابل ساختن است.

۲۳ـ الف) نخست بازده را برای این ماشین کارنو محاسبه می‌کنیم:

$$\eta_{\text{کارنو}} = ۱ - \frac{T_L}{T_H} = ۱ - \frac{۲۸۰/۰\mathrm{K}}{۳۶۰/۰\mathrm{K}} = ۰/۲۲۲۲۲ \approx ۰/۲۲۲۲$$

بنابراین بازدهٔ این ماشین کارنو حدوداً ۲۲٪ است. توجه کنید رابطهٔ $\mu = |W|/Q_H$ برای هر ماشینی برقرار است و آن را می‌توان برای ماشین کارنو نیز به‌کار برد.

$$|W| = (\eta)\ Q_H = (۰/۲۲۲۲)\ (۷۵۰/۰\ \mathrm{J}) = ۱۶۶/۶۷\mathrm{J} \approx ۱۶۶/۶۷\mathrm{J}$$

ب) این‌بار از رابطهٔ $\eta = ۱ - |Q_L|/Q_H$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$|Q_L| = (۱ - \eta)\ Q_H = (۱ - ۰/۲۲۲۲۲)\ (۷۵۰/۰\ \mathrm{J}) = ۵۸۳/۳۳\mathrm{J} \approx ۵۸۳/۳\mathrm{J}$$

به این نتیجه با استفاده از قانون اول ترمودینامیک نیز می‌توانیم برسیم:

$$|Q_L| = Q_H - |W| = ۷۵۰/۰\ \mathrm{J} - ۱۶۶/۶۷\mathrm{J} = ۵۸۳/۳۳\mathrm{J} \approx ۵۸۳/۳\mathrm{J}$$

۲۴ـ از تعریف توان داریم

$$P = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = W/P$$

از طرفی ضریب عملکرد برابر است با

$$K = \frac{Q_L}{W} \Rightarrow \Delta t = Q_L/PK$$

پس باید Q_L را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} Q_L &= |Q_{\text{سردشدن}}| + |Q_{\text{یخ بستن}}| \\ &= mc|\Delta T| + mL_F \\ &= (۱/۰۰\mathrm{kg})(۴/۱۸۷\mathrm{kJ/kg.K})(۱۰/۰\mathrm{K}) + (۱/۰۰\mathrm{kg})(۳۳۳/۳\mathrm{kJ/kg}) \approx ۳۷۶\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

از آنجا Δt را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta t = \frac{۳۷۶ \times ۱۰^{۳}\ \mathrm{J}}{(۱۱۰/۰\ \mathrm{J/s})(۴/۰)} = ۸۵۴/۵\mathrm{s} = ۱۴/۲۴\mathrm{min} \approx ۱۴\mathrm{min}$$

۱۸ الف) چون ماشين بخار يك فرايند چرخه اي را طي مي‌كند، از قانون اول ترموديناميك داريم: W=-Q . توجه كنيد كه اين كار محيط است.چون مسئله كار دستگاه (ماشين) را خواسته است، كار ماشين برابر با Q ميشود.از طرفي Q برابر است با |$Q= Q_H-|Q_L$ است. بنابراين داريم:

$$W_{\text{ماشین}} = ۱/۵ \times ۱۰^{۵}\text{MJ} - ۹/۰ \times ۱۰^{۴}\text{MJ}$$
$$= ۶/۰ \times ۱۰^{۴}\text{MJ}$$

ب) با استفاده از رابطه ۵-۷ داريم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{۶/۰\times ۱۰^{۴}\,\text{MJ}}{۱/۵\times ۱۰^{۵}\,\text{MJ}} = ۰/۴$$

بنابراين، بازده اين ماشين بخار ۴۰ درصد است.

۱۹ الف) با استفاده از رابطه ۵-۷ براي بازده ماشين داريم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{۲۰۰۰\text{J}}{۸۰۰۰\text{J}} = ۰/۲۵$$

پس بازده ماشين ۲۵ درصد است.

ب) اكنون با استفاده از رابطه ۵-۹ ،$|Q_L|$ را به دست مي آوريم:

$$= (۱ - \eta)\, Q_H = (۱ - ۰/۲۵)\,(۸۰۰۰)$$
$$= ۶۰۰۰\text{J}$$

$|Q_L|$ را مي‌توانستيم با استفاده از قانون اول ترموديناميك نيز به دست آوريم:

$$= Q_H - W = ۸۰۰۰\text{J} - ۲۰۰۰\text{J} = ۶۰۰۰\text{J}$$

پ) گرماي حاصل از سوخت J/g $۱۰^{۳}$ × ۵/۰ است.بنابراين، مقدار سوخت مصرف شده در هر چرخه چنين مي‌شود:

$$m = \frac{۸۰۰۰\text{J}}{۵/۰\times ۱۰^{۴}\,\text{J/g}} = ۰/۱۶\text{g}$$

ت) ماشين در هر ثانيه ۴۰ چرخه را مي‌پيمايد.بنابراين زمان پيمودن يك چرخه ، ۱/۴۰s مي‌شود. پس توان ماشين برابر است با

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۲۰۰۰\text{J}}{\frac{۱}{۴۰}\text{S}} = ۸۰۰۰۰\text{W} = ۸۰\text{kW}$$

۲۰ باید از بازده ماشن کارنو(معادله ۵-۱۰) استفاده کنیم($\eta = ۱ - T_L/T_H$) .توجه کنید که در این رابطه T_L و T_H بر حسب کلوین هستند. بنابراین باید نقطه انجماد و نقطه جوش را به کلوین تبدیل کنیم:

$$= ۱ - \frac{(۰ + ۲۷۳)\mathrm{K}}{(۱۰۰ + ۲۷۳)\mathrm{K}} \approx ۰/۲۷$$

بنابراین، بازده ماشین کارنو ۲۷ درصد است و ادعاي مخترع نادرست است.زیرا بازده ماشین او از بیشترین بازده محتمل بیشتر است.

۲۵ـ توان از رابطهٔ $P = W/t$ به‌دست می‌آید. به این منظور باید نخست W را محاسبه کنیم. از قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$|Q_H| = W - Q_L$$

و در نتیجه

$$W = |Q_H| - Q_L$$
$$= ۱/۳ \times ۱۰^{۵}\text{J} - ۹/۰ \times ۱۰^{۴}\text{J} = ۱۳ \times ۱۰^{۴}\text{J} - ۹/۰ \times ۱۰^{۴}\text{J} = ۴ \times ۱۰^{۴}\text{J}$$

بنابراین توان چنین می‌شود

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۴/۰ \times ۱۰^{۴}\,\text{J}}{۶۰\text{s}} = ۶/۷ \times ۱۰^{۲}\,W \approx ۷ \times ۱۰^{۲}\,W$$

ب) ضریب عملکرد برابر است با

$$K = \frac{Q_L}{W} = \frac{۹/۰ \times ۱۰^{۴}\,\text{J}}{۴ \times ۱۰^{۴}\,\text{J}} = ۲/۲۵ \approx ۲$$

۲۶ـ بیشترین ضریب عملکرد ممکن مربوط به یخچال کارنو است.

$$K_{\max} = K = \frac{Q_L}{W} = \frac{T_L}{T_H - T_L}$$

مقدار گرمایی که باید از آب گرفته شود تا یخ ببندد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Q = mL_F$$

در نتیجه W چنین می‌شود

$$W = Q_L\,\frac{T_H - T_L}{T_L} = (mL_F)\left(\frac{T_H - T_L}{T_L}\right)$$
$$= (۰/۲۵۰۰\,\text{kg})(۳۳۳/۷\text{kJ/kg})\frac{(۲۷۳/۱۵ + ۲۲/۰)\text{K}(۲۳۷/۱۵ - ۵/۰)\text{K}}{(۲۷۳/۱۵ - ۵/۰)\text{K}} \approx ۸/۴۰\,\text{kJ}$$

* لطفاً پیشنهادها و نظرات خود را به khoshbin@talif.sch.ir ارسال فرمایید.